Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

# Übungen zur Mathe III für Physiker

*Prof.Dr.P.Pickl*

**Blatt 13**

**Aufgabe 1:** Es sei auf $L^2([-\pi,\pi])$ das Skalarprodukt durch $\langle f,g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\lambda(dx)$ gegeben. Dann bilden die Funktionen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_{2n}(x) := \cos(nx)$ und $f_{2n-1}(x) := \sin(nx)$ $(n = 1,2,\ldots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([-\pi,\pi])$.

1. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) := |\sin x|$.
2. Leiten Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung und (a) die Beziehung
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$
her!
3. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe gleichmäßig gegen die Funktion $f$ konvergiert!

**Aufgabe 2:** Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung
$$\frac{\partial}{\partial t}p(\boldsymbol{x},t) = D\Delta p(\boldsymbol{x},t) \qquad ,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\ D>0$$
mit Hilfe der Fouriertransformation bzgl. $\boldsymbol{x}$ für die Anfangsbedingung
$$p(\boldsymbol{x},0) = \rho(\boldsymbol{x}) \in L_1(\mathbb{R}^3)\ ,$$
d.h. leiten Sie die Lösung
$$p(\boldsymbol{x},t) = (4\pi Dt)^{-3/2}\int e^{\frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4Dt}}\rho(\boldsymbol{y})d^3y$$
her.
Berechnen Sie die Lösung für $\rho(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2}$.
*Bemerkung*: Wählt man $D = -\frac{1}{2}i$ wird aus der Wärmeleitungsgleichung die freie Schrödingergleichung (Potential gleich Null). Somit haben Sie soeben auch die allgemeine Lösung der freien Schrödingergleichung bestimmt, die durch das Auftauchen von $i$ allerdings ein vollkommen anderes Verhalten als die der Wärmeleitungsgleichung zeigt.

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie: Unter der Fouriertransformation verwandelt sich die Faltung in das gewöhnliche Produkt, d.h. es gilt:
$$\widehat{f\star g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\widehat{g}\ ,$$
für alle $f,g\in L_2(\mathbb{R})\cap L_1(\mathbb{R})$ mit Werten in $\mathbb{C}$.
Wiederholung: Die Faltung zweier Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist als folgt definiert
$f\star g := \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$

Viel Erfolg bei der Klausur!